

国债期货下单策略的优化

中金所的金融期货合约包括国债期货和股指期货都是属于典型的小跳价资产，这类期货合约在设计时所规定的最小变动单位相对于资产价格比较小，由此造成限价指令簿上的限价单队列非常短。如果投资者用大量的仓位需要交易，直接使用市价单很容易就会把最优买卖价打穿产生滑点，增加交易成本。因此这里考虑使用市价单和限价单相结合的方法减少滑点产生的交易成本。

通过考察 10 年期国债期货主力合约在 2019 年的成交情况，可以评估出限价单在距离中间价各个价位上的成交概率，然后再根据投资者的风险偏好，依照动态规划原理，构建出 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程，求解该方程即可得出下单的最优策略。这个策略的大致思路可以这样概括，当投资者有大量仓位等待交易，便使用市价单先把一小部分仓位降下来，然后再用限价单交易，并且随着待交易的仓位减少增大所报价差，赚取价差收益，在临近交易时间限制前再使用市价单平调剩余仓位。在利用 2019 年以及 2020 年初的 10 年期国债期货主力合约进行回测发现在一定风险水平下，使用该策略能够获得比不计滑点成本的 TWAP 更好的交易价格，而与直接使用最优报价的限价单策略相比，这个策略能有效减少交易风险。但由于这个策略需要根据中间价动态调整限价单报价，并由此产生大量撤单，这可能是该策略的一个制约因素。

投资咨询业务资格：

证监许可【2011】1289 号

研究院 量化组

研究员

罗剑

☎ 0755-23887993

✉ luojian@htfc.com

从业资格号：F3029622

投资咨询号：Z0012563

陈维嘉

☎ 0755-23991517

✉ chenweijia@htfc.com

从业资格号：T236848

投资咨询号：TZ012046

杨子江

☎ 0755-23887993

✉ yangzijiang@htfc.com

从业资格号：F3034819

投资咨询号：Z0014576

陈辰

0755-23887993

chenchen@htfc.com

从业资格号：F3024056

投资咨询号：Z0014257

联系人

高天越

☎ 0755-23887993

✉ gaotianyue@htfc.com

从业资格号：F3055799

研究背景

国债期货是属于典型的小跳价资产，也就是这类资产的最小变动单位相对于资产价格比较小。投资者在交易这类资产时会在使用限价单不能成交的机会成本与使用市价单可能造成的滑点之间平衡，但由于最小变动单位小，所以在各个价位上挂限价单差别不是很大，因此国债期货限价单队列上的长度通常较短，甚至在五档价位上的某些位置可能没有报价。因此如果投资者拥有大量仓位需要交易直接使用市价单很可能把限价指令簿的买一或卖一价格击穿从而产生交易滑点，增加交易成本。

但如果使用限价单虽然能够获得与中间价相比更优惠的价差收益，但也有可能出现无法成交的情况，除了平衡成交机会与收益外，投资者在下单的时候还需要考虑所需交易的总仓位、在多长时间完成交易以及在完成交易前所能承担的价格变动风险。这几方面都将作为模型的输入参数，由投资者预先设定。

另外，当使用限价单时便会涉及成交概率的问题，由于国债期货是小跳价资产，可以忽略限价单的队列长度，从高频数据统计这个概率会比较容易。把以上问题确定好后便可以把下单问题转化为动态规划问题，使用 HJB 方程求解。

下单策略的构建

这里参考 Cartea, Á. and J. Penalva (2015) 在 Algorithmic and High-Frequency Trading 提出的方法综合运用市价单和限价单优化下单策略。这里假设投资者希望在给定时间 T 下买入或卖出 Q 手国债期货合约，由于买入和卖出的最优策略具有对称性，这里只需要以卖出策略分析即可。

假设国债期货即时中间价格 S_t 可以用布朗运动表示

$$dS_t = \sigma dW_t \tag{1}$$

σ 为资产价格波动率，这个变量在后面其实并没有用到。 W_t 为标准布朗运动。

如果投资者使用限价单报价，则其所报价格可用 $S_t + \delta_t$ 表示，即 $\delta (\delta > 0)$ 为投资者所报价格与中间价的距离。投资者根据剩余库存，交易结束时间，自身风险偏好，以及限价单成交概率、成交收益去动态调节 δ 。投资者所报价格 δ 与中间价距离越近，越容易成交，但成交后收益越低。这里把投资者在不同价位 δ 挂单发生成交的事件看作是计数过程 N^δ ，事件密度用 Λ 表示，其中

$$\Lambda(\delta) = \lambda \exp(-\kappa \delta) \tag{2}$$

用 M^τ 表示投资者在 τ 时刻用市价单的计数过程，用 ξ 表示投资者使用市价单产生的平均冲击成本，这里在计算最优策略时假设为半个买卖价差。

用 X^δ 表示投资者的现金流并且满足

$$dX_t^{\tau,\delta} = (S_t + \delta)dN_t^\delta + (S_t - \xi)dM_t^\tau \quad (3)$$

上式中的第一项表示使用限价单卖出国债期货(与中间价 S_t 相比较)所带来的超额收益,第二项表示使用市价单造成的损失。

$q_t^{\tau,\delta} = Q - N_t^\delta - M_t^\tau$ 表示投资者仍需要卖掉的剩余库存。

提供给投资者的操作空间 \mathcal{A} 包括选择使用市价单的时机 τ , 以及不使用市价单而使用限价单的报价 δ , $(\tau, \delta) \in \mathcal{A}$ 。

投资者在到期时间 T 的期望效用函数可以表示为

$$H^{(\tau,\delta)}(t, x, S, q) = \mathbb{E}_{t,x,S,q} \left[X_T^{\tau,\delta} + q_T^{\tau,\delta} S_T - \ell(q_T^{\tau,\delta}) - \phi \int_t^T (q_u^{\tau,\delta})^2 du \right] \quad (4)$$

其中 ℓ

$$\ell(q) = q(\xi + \alpha q) \quad (5)$$

公式(4)中的 $X_T^{\tau,\delta}$ 表示卖出国债期货后的现金收入, $q_T^{\tau,\delta} S_T$ 表示剩余库存的价值, $\ell q_T^{\tau,\delta} S_T$ 为对剩余库存的总惩罚, 从 $\ell(q)$ 可以看出, 这个惩罚包括了使用市价单平剩余仓的冲击成本 ξq , 以及产生剩余库存的额外惩罚 αq^2 。 $\phi \int_t^T (q_u^{\tau,\delta})^2 du$ 表示对在到期时间 T 前对未平仓合约的惩罚。

上述问题可以使用动态规划的原理构建 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程求解:

$$\max \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} - \phi q^2 + \sup_{\delta} \lambda e^{-\kappa \delta} [H(t, x + (S + \delta), S, q - 1) - H(t, x, S, q)]; \right. \\ \left. [H(t, x + (S - \xi), S, q - 1) - H(t, x, S, q)] \right\} = 0 \quad (6)$$

边界条件和终止条件为

$$\begin{aligned} H(t, x, S, 0) &= x \\ H(T, x, S, q) &= x + qS - \ell(q) \end{aligned} \quad (7)$$

利用变量分解的方法令 $H(t, x, S, q) = x + qS + h(t, q)$, 并且另 $\sup_{\delta}()$ 项里的一阶导数为0, 可得最优的限价单报价为

$$\delta^* = \frac{1}{\kappa} + [h(t, q) - h(t, q - 1)] \quad (8)$$

最后公式(6)可以化简为

$$\max \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} - \phi q^2 + \frac{e^{-1} \lambda}{\kappa} e^{-\kappa [h(t,q) - h(t,q-1)]}; \right. \\ \left. [-\xi + h(t, q - 1) - h(t, q)] \right\} = 0 \quad (9)$$

并且满足边界条件和终止条件:

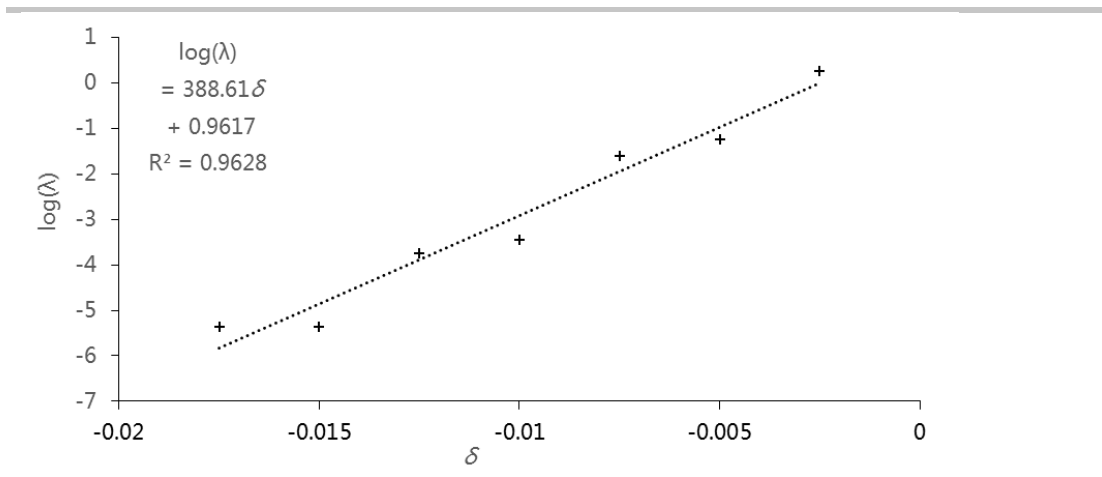
$$\begin{aligned} h(t, 0) &= 0 \\ H(T, q) &= -\ell(q) \end{aligned} \tag{10}$$

公式(5)中的 α 和 ϕ 代表投资者的风险偏好, 值越大表示投资者风险承受能力越低, 可以根据回测结果去选定最优的收益风险比。而 λ 和 κ 则由市场的流动性决定, 这里使用 10 年期国债期货主力合约 2019 年 1 月 2 日至 2020 年 2 月 28 日的高频数据进行分析。数据来源于天软的 500 毫秒 Level1 截面数据, 里面包含了 500 毫秒截面上的买一价、卖一价、买一量、卖一量、500 毫秒内的成交量和成交金额等数据。虽然 Level1 数据只有买一价和卖一价, 但是合约成交在买一, 买二, 买三, ……或卖一, 卖二, 卖三, ……价位上的数量必然是整数, 因此可以利用混合整数线性规划的方法求解出成交在这些价位上的合约数量, 从而统计出市价单出现在指令簿各个价位的事件密度 $\Lambda(\delta)$ 。这里 500 毫秒内市价买单的数量定义为成交在大于或等于该 500 毫秒中间价的合约数量, 总成交数量减去这部分剩下的就是市价卖单的数量了。利用 500 毫秒内成交在各个价位上的市价买单和卖单的数量可对公式(2)进行拟合。把公式(2)两边取对数可得

$$\log \Lambda = \ln \lambda - \kappa \delta \tag{11}$$

为了研究早上开盘后进场的交易效果, 这里使用开盘后约 30 分钟的数据进行拟合, 其中 2019 年 1 月 2 日 10 年期国债期货高频数据拟合效果如图 1 所示, 横轴 δ 表示与上 500 毫秒中间价的距离, $\log \Lambda$ 表示在特定价位上出现成交事件数量的对数。图中的采样点排布规律非常符合线性分布, 因此使用公式(2)来描述国债期货的成交价位分布是比较准确的。

图 1: 2019 年 1 月 2 日 10 年期国债期货高频数据拟合效果

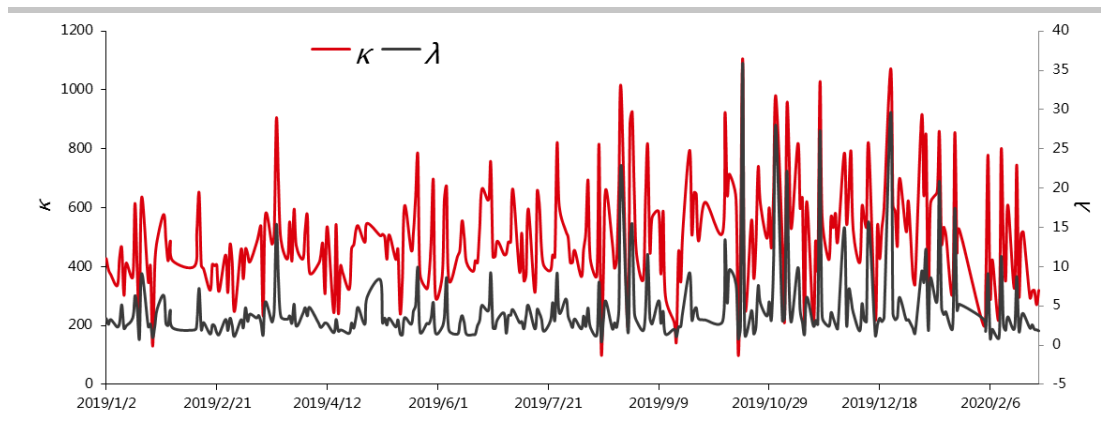


数据来源: 华泰期货研究院

图 2 作出的是 2019 年 1 月 2 日至 2020 年 2 月 28 日 10 年期国债期货参数 κ 和 λ 的走势。 κ 值大部分时候都是在 400-600 左右, 这个值比较大是因为这里使用国债期货的最小变动价位表示, 而国债期货的最小变动价位是 0.005, 非常小, 所以 κ 值显得比较大。 λ 值则是在 1-5

左右，少数情况下会大于10，这说明这些高频参数还是比较稳定的。而在实际使用中公式(9)和(10)的解也对这些参数不敏感。

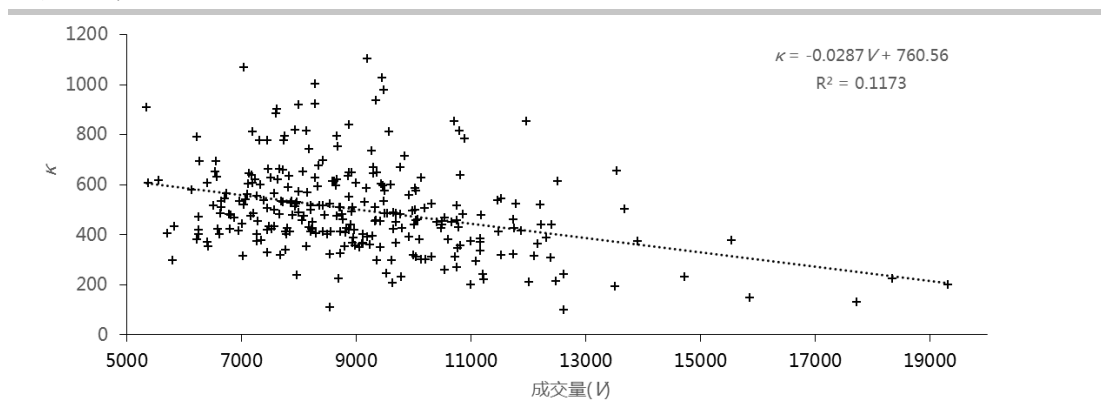
图 2： 10 年期国债期货参数日间变化



数据来源：华泰期货研究院

在这里 κ 反映的是限价单在不同报价深度的成交概率， κ 越大说明击穿指令簿的深度越小。图 3 分析的是 κ 与开盘后 30 分钟成交量的关系，成交量越小，在指令簿深度挂单的限价单成交概率越小，因此 κ 值越大。下面的散点图也反映的这一情况，成交量与 κ 值存在一定的线性关系。

图 3： 参数 κ 与成交量关系

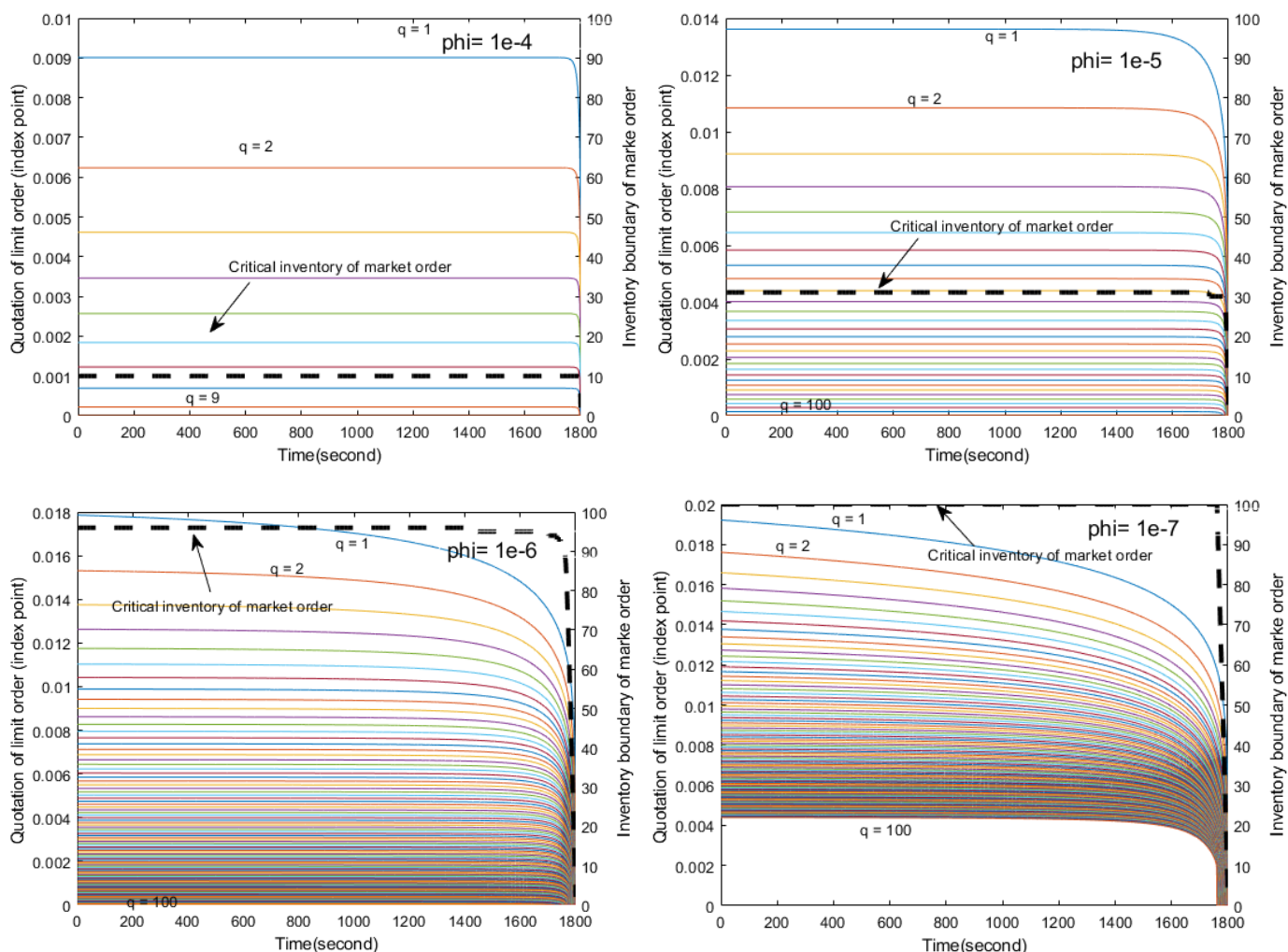


数据来源：华泰期货研究院

在确定参数 λ 和 κ 后，公式(9)和(10)可以使用有限差分法求解。这里假设下单要求是在半小时，即 1800 秒内卖出 100 手国债期货的平仓操作，买入的操作与之对称。从图 3 可见，开盘后半小时内买卖双方的成交量均值约在 10000 手左右，如果市价买卖单量相等的话，相当于半小时内有 5000 手市价买或卖单，因此这里的 100 手相当于这半小时内市价单量的 2%，相对较小，可认为不至于产生过大的市场影响。投资者对期末库存的风险偏好 α 设定为 10^{-2} ，公式(9)-(10)的解对此并不敏感。但是对交易当中的累积库存，即 ϕ 值比较敏感，因此考察 10^{-4} ， 10^{-5} ， 10^{-6} 和 10^{-7} 的情况。

从公式(9)和(10)可以看出策略的状态空间有两个维度分别是时间和库存,而操作空间则是使用限价单时的挂单位置 δ 和使用市价单的时机 τ 。在进行卖出平仓操作的交易开始时,投资者具有较高的初始仓位,即在库存较高的状态。为了把在不同状态下的最优操作作用图形表示,这里用横轴表示时间,左纵轴表示使用限价单时所报的价格 δ ,不同的库存状态用彩色曲线表示,越靠近横轴的曲线代表库存越高,越远离横轴的曲线代表库存越低。黑色虚线表示使用市价单的时间以及对应右轴所指示的库存,当在特定时间,库存超过黑色虚线对应的库存值时,就使用市价单代替限价单。图4左上角的图里,在 $\phi = 10^{-4}$ 的参数下,投资者极度厌恶风险,希望尽快把手上的库存卖掉平仓,所以会较多使用市价单,宁愿承担市价单带来的损失 ξ 去换取成交的确定性。因此市价单的黑色曲线会被压得很低,在绝大部分交易时间内,只要库存数量超过9手便使用市价单平仓。当库存下降到9手后再使用限价单,通过承担成交的不确定性,来减少平仓成本。在较低的 ϕ 值下出现这种情况可能是因为参与国债期货的散户较少从而导致市价单的使用量少,市场对流动性的需求不足,市场流动性相对过剩,因此使用限价单较难成交,这才偏向使用市价单尽快减少仓位。图4中的右上图是 $\phi = 10^{-5}$ 时的最优策略,这时投资者对库存风险的厌恶程度降低,平仓需求没有那么迫切,所以愿意减少市价单的使用,只有当库存数量大于30手时才会使用。在使用限价单时,最优报价与之前的情况相比有了更严格的区分,库存越大所报价格越接近中间价,但是与中间价的距离较小,不到国债期货的一个最小变动价位,所以在实际交易中取整后可能会落到最优卖价上。左下图是 $\phi = 10^{-6}$ 时的情景,这时库存约束约束进一步放宽,在交易一开始时只会使用市价单平5手,但所报价差仍然较小,绝大部分库存状态下不足一个最小变动单位,即0.005。只有当库存减少至约50手以下时,才有可能拉开报价,赚取限价单的价差收益,但是在临近交易结束前50秒,如果剩余仓位较多再使用市价单平仓。右下图是 $\phi = 10^{-7}$ 时的情景,在这种风险偏好下交易刚开始时完全不会使用市价单平仓,而所报限价单价格也接近一个最小变动单位,在临近交易结束前,所报限价单价差才逐渐回落因此在这种情况下最有可能赚取价差收益,同时也会产生较多剩余仓位和撤单。

图 4： 各种参数条件下的最优下单策略



数据来源：华泰期货研究院

下单策略回测

从上面的分析可以看出下单策略是一个根据即时价格 S_t 变化而做出挂撤单的动态决策过程。在回测下单策略时，下单方法如下：每收到一笔行情数据便根据当前的库存状态和交易时间判定挂单策略，在收到下一笔行情数据后判定之前下单的成交情况。

挂出的限价卖单按下面方法判定能否成交：

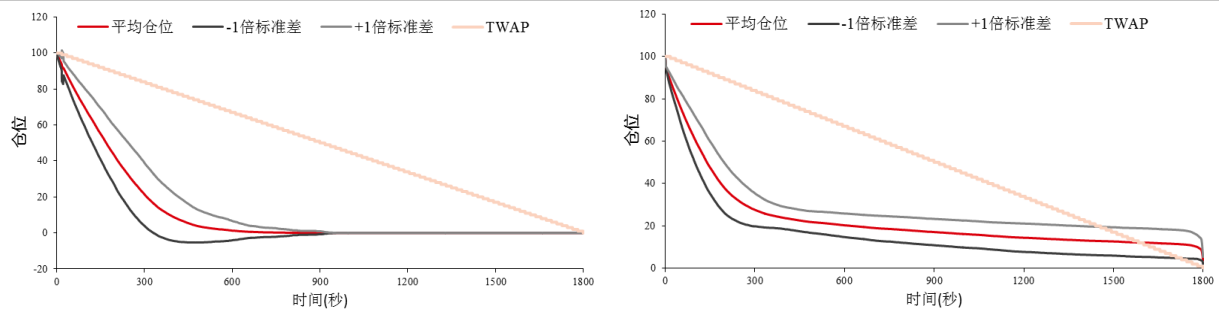
- (1) 最高卖单成交价 < 所挂价格，则所挂卖挂单无机会成交。
- (2) 最高卖单成交价 > 所挂价格，意味着卖单被击穿，判定为成交。
- (3) 最高卖单成交价 = 所挂价格。根据当前时刻 $t + 1$ 的成交量和成交额推算排名和判断成交。

而在使用市价卖单时则是按照行情数据中成交位置最低的一个价格计算，接近成交的最差

情况。另外回测是限定了市价单的下单速度不能超过 1 手/500 毫秒。而作为对照，这里加入在交易结束时间段内的 TWAP(Time Weighted Average Price)。TWAP 是按照买一价进行计算。在实际交易中由于滑点的存在，这里使用的 TWAP 价将会优于实际情况。因此这里下单策略对比的是更优的 TWAP，从后面的回测结果看，由于限价单的使用，这里提出的下单策略表现仍然优于理想化的 TWAP。

下面回测的是 2019 年 1 月 2 日至 2020 年 2 月 28 日在早上 9:01 开始卖出 10 年期国债期货主力合约的下单策略与 TWAP 的对比。为了研究随机控制策略的效果，这里加入了只在中间价加半个最小变动单位报价的策略作为对比，这个策略不涉及市价单，也不涉及最优报价的计算。图 4 作出了这个策略以及在风险偏好 $\Phi=10^{-6}$ 下仓位的均值变化曲线与标准差。由于没有拉开价差，纯限价单策略在 900 秒时便可以把仓位降至 0 完成交易。在 $\Phi = 10^{-6}$ 时，前 10 秒内使用市价单迅速把仓位降到 95 手以下之后便开始使用限价单，这时仓位下降曲线便趋向于平稳了，在临近结束前 10 秒内如果有剩余仓位则继续使用市价单平仓。从图中可以看出，使用了优化后的下单策略在 $\Phi = 10^{-6}$ 的风险水平下，前 300 秒内仓位下降大部分时间都比 TWAP 快，在 300 秒后由于库存减少，价差被拉大，成交困难所以下降减慢，在临近交易时间限制时再使用市价单平掉剩余仓位。对比图 4 中的左右两图也可以发现在 $\Phi = 10^{-6}$ 的风险水平下，随机控制策略仓位的下降速度与纯限价单策略较为一致，这是因为此时剩余库存较高，最优报价与中间价非常接近，因此与纯限价单策略一致。在 300 秒后纯限价单策略仓位变化的标准差有所增大，但随机控制策略的仓位标准差变化不大，直至结束仓位标准差都没有太大变化，这说明使用随机控制策略的优势之一是控制仓位变化的标准差，从而有效控制库存风险。

图 5：不同下单策略下的仓位变化 左：纯限价单策略 右： $\Phi = 10^{-6}$

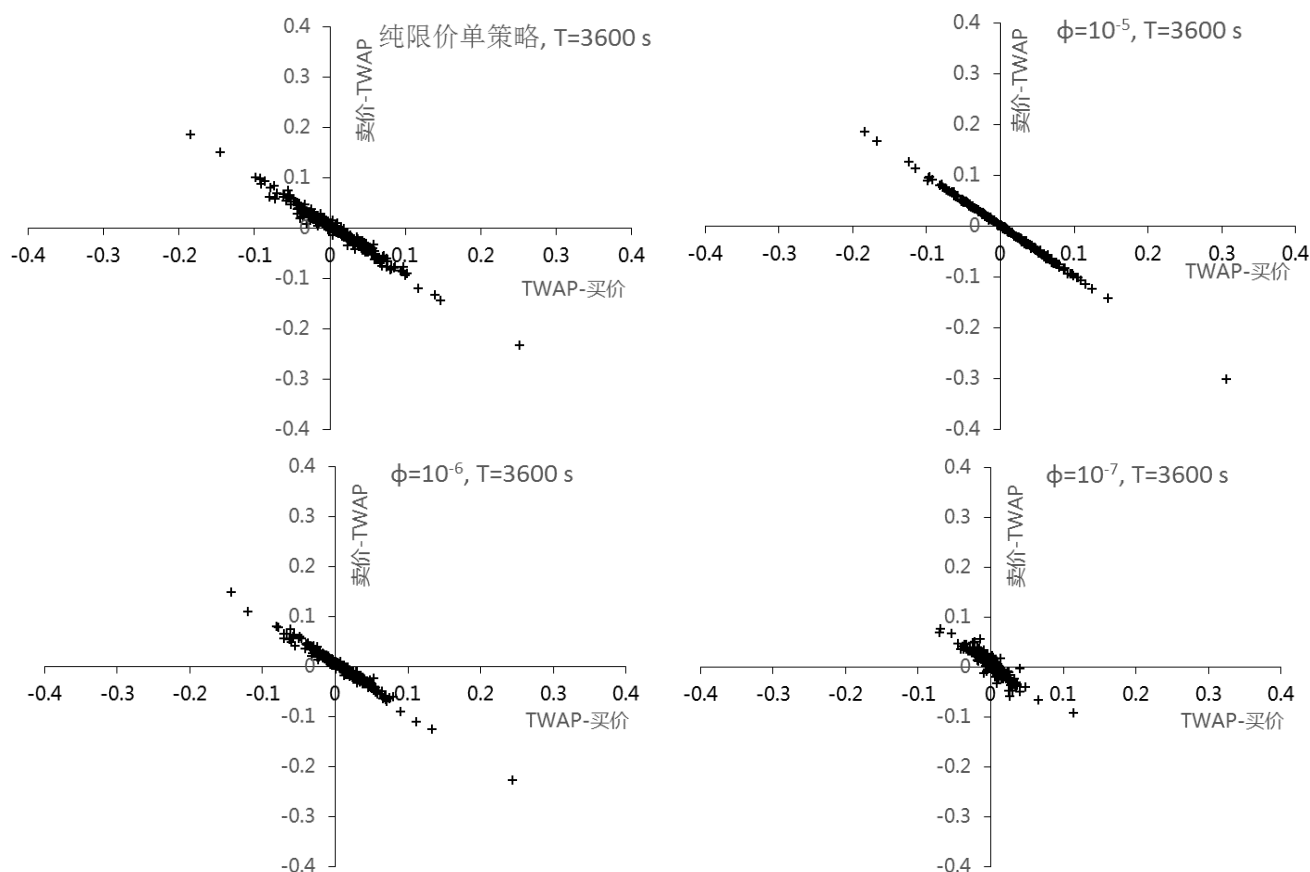


数据来源：Wind 华泰期货研究院

上面的分析体现了下单策略在卖出平仓过程中的仓位变化。除了卖出交易,该下单策略同样适用于买入交易,图 6 对比的是纯限价单策略和各种下单参数下随机控制策略交易均价与 TWAP 的差别。在进行卖出操作时卖价越高越有利,因此这里的价差按卖价-TWAP 计算。而在进行买入操作时,买价越低越有利,因此价差按 TWAP-买价计算。图 5 考虑的是在 2019 年 1 月 2 日至 2020 年 2 月 28 日进行买入和卖出的价差分布,在各种条件下买入的价差和卖出的价差都具有良好的线性关系。而且上面的点大多数集中在第二和第四象限,这说明在买卖一方优于 TWAP 时另外一方必定比 TWAP 差。使用纯限价单策略的点分布较为散乱,意味着与 TWAP 相比

这个策略的盈利标准差较大。剩余 3 张图是 $\phi=10^{-5}$, 10^{-6} 和 10^{-7} 的情况，随着 ϕ 值得减少，库存风险的厌恶程度下降，限价单价差被拉大，每笔成交的收益也会有所提高，在 10^{-7} 的情况下与 TWAP 相比的标准差会比较小。

图 6： 不同交易参数下的买卖均价与 TWAP 的差值分布



数据来源：Wind 华泰期货研究院

表格 1 展示了纯限价单策略和不同交易参数下策略与 TWAP 相比的表现。买价和卖价分别与 TWAP 的差别可能比较大，例如使用纯限价单策略以及 $\phi =10^{-5}$ 和 10^{-6} 时，卖出表现比 TWAP 差，但在买入时表现都比 TWAP 好。在 $\phi =10^{-7}$ 时无论买入还是卖出都比 TWAP 好。这说明使用限价单进行双向国债期货操作都会比无滑点的 TWAP 好，单如果能承受更高的库存风险，拉开限价单报价则买卖双向都有可能得到比 TWAP 更优的价格。

另外值得考虑的是策略与 TWAP 相比的标准差，纯限价单策略的标准差较高，达到 9.13，在 $\phi =10^{-5}$ 的风险偏好下，由于前 70 手的平仓会使用到市价单，产生较多滑点从而也会增大标准差。当 $\phi =10^{-6}$ 时，标准差开始下降，这是因为在这个风险水平下限价单的使用占主导。当 $\phi =10^{-7}$ 时，与 TWAP 相比的标准差降至最低，只有 4.13，这与图 6 的散点分布相一致。因此基于随机控制的下单策略优势主要体现在对下单价格与 TWAP 标准差的控制上。如果根据风险收益比选择参数，那么 $\phi =10^{-7}$ 将会是最优的参数，但这个参数在交易到期时产生的剩余库存也较高达到 7.66 手。

另外值得注意的是这个策略产生的撤单量，因为这个下单策略是根据中间价变化去挂限价单，当中间价出现变化时就要去重新调整报价，从而造成大量撤单。从表格 1 上来看买卖双方的撤单量差异并不大， ϕ 值越低，报价与中间价距离越大，越不容易成交，那么产生的撤单量就越多。由于单一交易账户撤单量的限制，大量的撤单有可能造成这个下单策略的资金规模限制。

表格 1 不同交易参数下的策略表现 (均值、标准差为合约最小变动单位)

	纯限价单策略	$\phi = 10-5$	$\phi = 10-6$	$\phi = 10-7$
(TWAP-买价)均值	1.60	1.17	1.44	0.34
(卖价-TWAP)均值	-0.56	-0.95	-0.21	0.73
(买卖价-TWAP)均值	0.52	0.11	0.62	0.53
(买卖价-TWAP)标准差	9.13	10.55	7.38	4.13
(买卖价-TWAP)均值/标准差	0.06	0.01	0.08	0.13
平均买单剩余量	0.00	0.00	1.10	6.72
平均卖单剩余量	0.00	0.04	1.92	8.60
平均买卖单剩余量	0.00	0.02	1.51	7.66
(买卖价 vs TWAP)均值/平均买卖单剩余	N.A.	5.76	0.41	0.07
平均买单撤单量	66.7	334.1	515.9	534.2
平均卖单撤单量	84.4	344.5	514.4	530.3
平均买卖撤单量	75.6	339.3	515.2	532.3

数据来源: Wind 华泰期货研究院

结果与讨论

这篇报告使用市价单和限价单结合的方法优化国债期货下单策略。通过评估限价单的成交概率以及投资者的风险偏好，建立了基于随机控制的 HJB 方程。由此方程可以得出最优的下单策略，这个策略的大致思路可以这样概括，当有大量剩余仓位，便使用市价单先把仓位降下来一部分，然后再用限价单交易，并且随着库存减少增大所报价差，在临近交易时间限制前再使用市价单平调剩余仓位。在利用 2019 年以及 2020 年初的 10 年期国债期货进行回测发现在一定风险水平下，使用该策略能够获得比不计滑点成本的 TWAP 更好的交易价格，也比单纯使用最优报价的纯限价单策略具有更低的交易风险。但由于这个策略需要根据中间价动态调整限价单报价，并由此产生大量撤单，这可能是该策略的一个制约因素。

● 免责声明

本报告基于本公司认为可靠的、已公开的信息编制，但本公司对该等信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告所载的意见、结论及预测仅反映报告发布当日的观点和判断。在不同时期，本公司可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

本公司力求报告内容客观、公正，但本报告所载的观点、结论和建议仅供参考，投资者并不能依靠本报告以取代行使独立判断。对投资者依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及作者均不承担任何法律责任。

本报告版权仅为本公司所有。未经本公司书面许可，任何机构或个人不得以翻版、复制、发表、引用或再次分发他人等任何形式侵犯本公司版权。如征得本公司同意进行引用、刊发的，需在允许的范围内使用，并注明出处为“华泰期货研究院”，且不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和修改。本公司保留追究相关责任的权力。所有本报告中使用的商标、服务标记及标记均为本公司的商标、服务标记及标记。

华泰期货有限公司版权所有并保留一切权利。

● 公司总部

地址：广东省广州市越秀区东风东路761号丽丰大厦20层

电话：400-6280-888

网址：www.htfc.com