

两种亚式期权类型的对冲方法研究

摘要:

亚式期权产品要素包括挂钩资产、资产运行期间平均价格、执行价、挂钩资产波动率、无风险利率、产品期限以及产品规模。这些要素相互联系并且相互制约。挂钩资产、执行价、挂钩资产波动率、无风险利率以及产品期限则决定了亚式期权的理论价格，同时也影响对冲策略的交易成本。根据亚式期权的结构特点，可以将亚式期权区分为每日连续取样和取样点离散的类型。本文根据这两种亚式期权的结构特点设计出对应的期权产品模型，采用传统的对冲方法以及基于效用的对冲方法进行测试，并对结果进行对比分析。

华泰期货研究所 量化组

罗剑

量化研究员

☎ 0755-23614607

✉ luojian@htfc.com

从业资格号: F3029622

投资咨询号: Z0012563

华泰期货研究院 量化组

张纪珩

量化研究员

☎ 0755-23993171

✉ zhangjihang@htfc.com

从业资格号: F3047630

算术平均标的价的亚式期权

期权又称为选择权，是一种衍生性金融工具。是指买方向卖方支付期权费（指权利金）后拥有的在未来一段时间内或未来某一特定日期（指亚式期权）以事先规定好的价格（指履约价格）向卖方购买或出售一定数量的特定标的物的权利，但不负有必须买进或卖出的义务（即期权买方拥有选择是否行使买入或卖出的权利，而期权卖方都必须无条件服从买方的选择并履行成交时的允诺）。而亚式期权 (Asian Options) 即是指买入期权的一方只有在期权到期日当天才能行使的期权，到期收益为标的价格运行期间的均价与执行价之差。

表格 1: 亚式期权到期收益

到期收益	看涨	看跌
到期收益 (若为实值)	$Max(S_{avg} - K, 0)$	$Max(K - S_{avg}, 0)$
到期收益 (若为虚值)	0	0

数据来源：华泰期货研究院

亚式期权的定价模型的推导需要如下的假设条件：

- 1) 假设市场无交易成本。这一假设在现实市场中并不成立，因为现实交易中不仅有交易成本，而且对于期权复制的影响较大；
- 2) 假设市场标的可无限分割。所使用的沪金期货每手合约价值可能会导致存在不满一手而无法调仓的情况，从而导致跟踪误差；
- 3) 假设市场波动率为常数。市场波动率并不是常数，而是随着行情的变化而变化的变量，且选取的计算周期不同亦存在差异。

由于上述假设与现实市场有较大差距，因此，使用理论模型定出的期权理论价格与实际市场运行对冲后的期权价格存在一定的差异。

在标的资产服从对数正态分布与风险中性的假设下，算术平均标的价格下的期权价格并没有闭解。因此多数定价公式都是采用逼近的方法来计算亚式期权的价格。常见的计算算术平均亚式期权价格的方法有 Turnbull - Wakeman Approximation, Levy Approximation, Curran Approximation。下文讨论的是 Curran Approximation。

首先，统一符号与标记：

$A = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i S_i$ ，加权算术平均值，其中 w_i 为权重， $W = \sum_{i=1}^n w_i$ ，当 $w_i = 1$ 时为算术平均值。

$G = (\prod_{i=1}^n S_i^{w_i})^{\frac{1}{W}}$, 几何算术平均值。

S: 标的价格

C_A : 亚式期权价格

K: 执行价格

$X_i = \ln(S_i)$, 标的价格对数化

$X = \ln(G)$, 几何平均标的价格对数化

r: 无风险利率

b: 持有成本, 对于期货, $b=0$ 。

计算部分

对于算术平均下的亚视看涨期权, 其价格可以写成期末 Payoff 的贴现值:

$$C_A = e^{-rT} E[\text{Max}(A - K, 0)] = e^{-rT} E\{E[\text{Max}(A - K, 0)|G]\} \quad (1)$$

对于 (1) 式, 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} C_A &= e^{-rT} \int_0^\infty E[\text{Max}(A - K, 0)|G] g(G) dG \\ &= e^{-rT} \left\{ \int_0^K E[\text{Max}(A - K, 0)|G] g(G) dG \right. \\ &\quad \left. + \int_K^\infty E[\text{Max}(A - K, 0)|G] g(G) dG \right\} \end{aligned}$$

其中, g 是几何平均价格 G 的密度函数, 将括号内的两个积分值设为 C_1 、 C_2 , 则 C_A 可以写成如下形式:

$$C_A = e^{-rT} (C_1 + C_2)$$

对于 C_2 :

在 BSM 假设下, $X_i = \ln(S_i)$ 服从正态分布, 设 X_i 的均值为 μ_i , 标准差为 σ_i 。则对于 $X = \ln(G)$ 而言。

$$X = \ln(G) = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i \ln(S_i) = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i X_i$$

因此 $X = \ln(G)$ 同样服从正态分布，其均值和方差分别为：

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i u_i \\ \sigma^2 &= \frac{1}{W^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \\ \sigma_{Xi} &= \frac{\sigma_i}{W} \sum_{j=1}^n w_j \sigma_j \rho_{ij}\end{aligned}$$

其中 ρ_{ij} 是 X_i 与 X_j 的相关系数， σ_{Xi} 是 X_i 与 X 的协方差。对于 C_2 ，由于 $S_i \geq 0$ ，所以 $A \geq G$ 恒成立。因此， $A \geq G > K$ ，即 C_2 中的 \max 函数可以去掉。根据上述变换， C_2 可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}C_2 &= \int_{\ln(K)}^{\infty} E[(A|e^x) - K] g(e^x) e^x dx \\ &= \int_{\ln(K)}^{\infty} E\left[\left(\frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i S_i \mid e^x\right) - K\right] g(e^x) e^x dx \\ &= \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n w_i \int_{\ln(K)}^{\infty} E[(S_i|e^x) - K] g(e^x) e^x dx - \int_{\ln(K)}^{\infty} K g(e^x) e^x dx\end{aligned}$$

积分项中，由于 g 是 G 的密度函数，而 G 服从对数正态分布，因此 $(e^x)e^x = f(x)$ 服从正态分布。

将 C_2 等式最后两个积分设为 I_1 、 I_2 。

产品模型参数

亚式期权产品要素包括挂钩资产、资产运行期间平均价格、执行价、挂钩资产波动率、无风险利率、产品期限以及产品规模。

这些要素相互联系并且相互制约。挂钩资产、执行价、挂钩资产波动率、无风险利率以及产品期限则决定了亚式期权的理论价格，同时也影响对冲策略的交易成本。另一方面，产品保底收益率、执行价的设定则决定产品的市场吸引力。

因此，产品要素的设定需要在保证产品的发行规模基础上寻求期权售价与对冲成本的最优化。

由于亚式期权是路径依赖型期权，因此亚式期权定价公式要考虑到执行价的调整。

表格 2：亚式期权定价公式

类型	亚式期权定价公式
Call	$C = (S_0 e^{-Q_a T} N(d_1) - K_{adj} e^{-rT} N(d_2)) * T / (T + t_1)$
Put	$P = (-S_0 e^{-Q_a T} N(-d_1) + K_{adj} e^{-rT} N(-d_2)) * T / (T + t_1)$

数据来源：华泰期货研究院

说明：

S_0 : 标的资产初始价格

K: 执行价

r: 无风险利率

T: 期权剩余时间

t_1 : 期权已运行时间

S_{avg} : 期权截至 t_1 时的标的资产均价

$$K_{adj} = \frac{(t_1 + T) * K - t_1 * S_{avg}}{(r - q)T}$$

$$M_1 = \frac{e^{(r-q)T} - 1}{(r - q)T}$$

$$M_2 = \frac{2e^{[2(r-q)+\sigma^2]T}}{(r - q + \sigma^2)(2r - 2q + \sigma^2)T^2} + \frac{2}{(r - q)T^2} \left[\frac{1}{2(r - q) + \sigma^2} - \frac{e^{(r-q)T}}{(r - q + \sigma^2)} \right]$$

$$Q_a = \frac{r - \log(M_1)}{T}$$

$$\sigma_a = \frac{\sqrt{\log(M_2)}}{T} - 2(r - Q_a)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_{adj}}\right) + (r - Q_a + 0.5\sigma_a^2)T}{\sigma_a\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_a\sqrt{T}$$

为检测参数对产品风险的影响,设计如下产品,用来测试说明。假设市场黄金波动率为 22%,则模型定价参数如下表:

表格 3: 产品参数

参数名	参数设置
期权类型	亚式
看涨/看跌	看涨
方向	买入
期初价格	288.80
执行价格	288.80 (ATM)
期限	90 天
波动率	19.14%
无风险利率	3%
规模	100 手

数据来源: 华泰期货研究院

假设定价波动率为 16.14%, 存在-3%的溢价。采取蒙特卡洛模拟, 默认路径 2000。

这里将亚式期权区分为每日连续取样和取样点离散的类型。对于取样点离散的类型, 其他产品参数依然保持不变, 设定取样点时刻为存续期间的 1/3, 5/9, 7/9 以及最后时刻, 此时改变存续期间 T, 原产品变为离散取样的亚式期权类型。主要测试 WW 对冲带, 1.5*dv/2 对冲和固定阈值对冲三种对冲方法。

以下通过模拟测试三种方法, 分别列出不同亚式期权类型下的统计结果, 并且进行分析。

亚式期权对冲方法 1: WW 对冲带

这里简述一下 WW 方法: 该方法确定一个固定的可以接受的 delta 敞口, 当 delta 超过这个数值时, 交易员就进行对冲。Whalley-Wilmott 渐进解计算得出的对冲带以 Black-Scholes 模型的 delta 值为中心, 对冲带边界表达式:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \pm H_0, \text{ 其中 } H_0 = \left(\frac{3}{2} \frac{e^{-r(T-r)} \lambda S \Gamma^2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{3}}$$

λ 是按比例计算的交易成本: $\text{trading cost}=\lambda NS$, N 是交易证券的总数量; Γ 是BSM模型的gamma值, γ 是风险厌恶系数。其中 γ_0 风险厌恶系数的取值方法如下:

假定 $\alpha < H_0 < \beta$ (这里假定alpha为0.12, beta为0.14), 则可得出 γ_0 的范围, $\gamma_0 \in [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$, 在此范围中等间隔地取 $N(N > 2)$ 个值, 对应不同的 γ_0 值做MC模拟。根据MC模拟指标选择适宜的 γ_0 , 作为对冲的参数值。 γ_0 选择及WW策略对冲步骤如下:

1. 设定模拟的参数, 包括期权买卖方向; 交易成本 λ ; 期权类型; 无风险利率 r ; 执行价 K ; 期权期限 T ; 波动率 v ; 期初价格 $S(0)$; 分红率 q 等;
2. 根据AT策略计算对应的Delta容忍范围值 h , 取 $\gamma_{\min} = h - 0.02, \gamma_{\max} = h + 0.02$ 。
3. 在 $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ 范围内等间隔地取 N 个值, 对任意的 $\gamma'_m (1 \leq m \leq N)$, 令 $\gamma_0 = \gamma'_m$ 。根据设定的期权参进行MC模拟, 并按照WW模型进行对冲。
4. 对比MC模拟结果, 选取适宜的 γ_0 值作为最终实盘中使用的参数值。

按照如上步骤, 输入合约参数, 可以得到 $\gamma_0 = 0.158875$, 采用该参数进行回测。

1) 每日都取样类型

对于每日都取样类型的进行蒙特卡罗模拟回测, 默认路径2000。

各项统计指标如下 (由于买入, 权利金支出为负):

表格 4: 连续取样的亚式期权 WW 对冲

虚值程度	0%	3%	5%	8%	10%
权利金	-641716.88	-309327.77	-175067.10	-65712.58	-31459.77
期望	110424.16	95929.78	75814.18	44807.76	32213.19
标准差	76921.27	67926.91	50804.39	35239.45	22322.87
胜率	89.00	93.33	92.00	90.00	93.33
盈亏比	135.47	81.11	56.05	28.90	25.10
平均手续费 + 冲击成本	7034.04	5327.47	3808.27	2198.08	1368.75
平均调仓次数	56.47	47.63	42.03	34.93	31.90

数据来源: 华泰期货研究院

2) 取样点离散类型

各项统计指标如下（由于买入，权利金支出为负）：

表格 5：取样点离散的亚式期权 WW 对冲

虚值程度	0%	3%	5%	8%	10%
权利金	-800798	-452597	-293844	-142137	-83149.6
期望	202628.8	177037.2	167786.6	123023.6	123968.7
标准差	539619.7	500205.5	475537	396532.7	268805.2
胜率	82	82	82	80	86
盈亏比	3.004652	2.891905	3.040087	2.829102	5.40614
平均手续费 + 冲击成本	10792.51	9911.259	9016.093	6756.665	5338.933
平均调仓次数	52.32	49.3	46.94	41.7	38.02

数据来源：华泰期货研究院

依据 WW 方法对亚式期权特点进行 Delta 动态对冲，可以降低收益的波动性，减少组合的极端亏损额。

亚式期权对冲方法 2：对冲阈值

对冲方法：使用对冲阈值为总规模 5% 的对冲策略，当对冲差值大于总规模*5% 的仓位时，则进行 delta 对冲；这里阈值为 $100 * 5\% = 5$ 手，各项统计指标如下（由于买入，权利金支出为负）：

1) 每日都取样类型

表格 6: 连续取样的亚式期权采用对冲阈值方法对冲

虚值程度	0%	3%	5%	8%	10%
权利金	-641716.88	-309327.77	-175067.10	-65712.58	-31459.77
期望	90111.22	98464.22	82492.54	39571.79	20333.31
标准差	141044.42	127261.30	113150.51	92908.52	129652.60
胜率	80.00	73.33	60.00	73.33	66.67
盈亏比	5.30	6.51	6.50	3.08	1.54
平均手续费 + 冲击成本	5103.85	4810.11	4154.83	2993.67	1920.34
平均调仓次数	16.60	16.93	14.53	11.13	7.33

数据来源: 华泰期货研究院

2) 取样点离散

各项统计指标如下 (由于买入, 权利金支出为负):

表格 7: 离散取样的亚式期权采用对冲阈值方法对冲

虚值程度	0%	3%	5%	8%	10%
权利金	-800798	-452597	-293844	-142137	-83149.6
期望	319900	265584.3	238342.9	182814.8	140543.3
标准差	672438.2	644362.1	597335.7	487039.9	457871.7
胜率	79.5	82	81	81	81.5
盈亏比	4.059765	3.511065	3.582847	3.659514	3.243162
平均手续费 + 冲击成本	9893.508	8583.461	7418.421	5710.635	4602.021
平均调仓次数	23.895	21.995	19.56	15.44	12.23

数据来源: 华泰期货研究院

对于取样点离散的亚式期权类型，该方法在不同虚值情况下都拥有最大期望，同时胜率基本都维持在 80% 左右。在期望收益方面，该方法的相对于其他两种方法，拥有最大值。

结论

综上，以上两种方法都满足回测指标要求。其中 WW 方法拥有最大胜率以及最小的标准差，可以视作一种较为稳定的对冲策略。

对于离散取样的亚式期权类型，在平值附近 (0%~5%)，对冲阈值的对冲方法在风险方面较为激进，拥有最大的收益期望和最大标准差，且相对与 WW 对冲方法，随着虚值程度增加，其标准差的变化没有 WW 变化的幅度大。

对于每日连续取样的亚式期权类型，WW 方法各项表现最好，拥有最大收益的同时具有最小标准差。对冲阈值策略在平值附近表现与 WW 策略差别不大，在靠近 10% 的过程中，逐渐变大。

● 免责声明

此报告并非针对或意图送发给或为任何就送发、发布、可得到或使用此报告而使华泰期货有限公司违反当地的法律或法规或可致使华泰期货有限公司受制于的法律或法规的任何地区、国家或其它管辖区域的公民或居民。除非另有显示，否则所有此报告中的材料的版权均属华泰期货有限公司。未经华泰期货有限公司事先书面授权下，不得更改或以任何方式发送、复印此报告的材料、内容或其复印本予任何其它人。所有于此报告中使用的商标、服务标记及标记均为华泰期货有限公司的商标、服务标记及标记。

此报告所载的资料、工具及材料只提供给阁下作查照之用。此报告的内容并不构成对任何人的投资建议，而华泰期货有限公司不会因接收人收到此报告而视他们为其客户。

此报告所载资料的来源及观点的出处皆被华泰期货有限公司认为可靠，但华泰期货有限公司不能担保其准确性或完整性，而华泰期货有限公司不对因使用此报告的材料而引致的损失而负任何责任。并不能依靠此报告以取代行使独立判断。华泰期货有限公司可发出其它与本报告所载资料不一致及有不同结论的报告。本报告及该等报告反映编写分析员的不同设想、见解及分析方法。为免生疑，本报告所载的观点并不代表华泰期货有限公司，或任何其附属或联营公司的立场。

此报告中所指的投资及服务可能不适合阁下，我们建议阁下如有任何疑问应咨询独立投资顾问。此报告并不构成投资、法律、会计或税务建议或担保任何投资或策略适合或切合阁下个别情况。此报告并不构成给予阁下私人咨询建议。

华泰期货有限公司 2019 版权所有并保留一切权利。

● 公司总部

地址：广东省广州市越秀区东风东路761号丽丰大厦20层、29层04单元

电话：400-6280-888

网址：www.htfc.com